Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : **Baccalauréat**
Session : **2021**
Série : **D-TI**
Épreuve : **Mathématiques**
Durée : **4h** ; Coefficient : **4**

Partie A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

Cette partie est constituée de trois exercices indépendants numérotés de 1 à 3.

Exercice 1 : (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 36x^2 - 2x^3$

1. Montrer que f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $36y'' + 6y' + y = 2592 - 2x^3$ **1pt**
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, 18]$ et déterminer la valeur de x pour laquelle f atteint son maximum sur cet intervalle. **1,5pt**
3. Une région reçoit 36 doses de vaccin à la COVID-19 dont n doses proviennent d'une firme A, n doses proviennent d'une firme B et le reste d'une firme C(avec $1 \leq n \leq 17$). On tire au hasard et simultanément 3 doses de vaccin du lot.

a) Démontrer que le nombre de tirages donnant une dose de chaque firme est f(n). **0,5pt**

b) Soit P(n) la probabilité de tirer une dose de chaque firme. Exprimer P(n) à l'aide de f(n) et en déduire la valeur de n pour laquelle P(n) est maximale. **1pt**

Exercice 2 : (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$$

1. Montrer que l'équation $(E) \Leftrightarrow (z^2 - 4z + 3)(z - 2 - i\sqrt{3}) = 0$. **0,5pt**
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **0,75pt**
3. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 3, $2 + i\sqrt{3}$, 7 et $11 + 4i\sqrt{3}$.

a) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral. **0,5pt**

b) Soit r la rotation de centre le point F et d'angle $\frac{\pi}{3}$; d'écriture complexe :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

Déterminer l'affixe du point F et montrer que r(C)=D, en déduire alors que le triangle DFC est équilatéral. **1,5pt**

c) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h qui transforme I en D et B en C. **1pt**

d) Déterminer l'expression complexe de la transformation $S = h \circ r$. **0,75pt**

Exercice 3 (4,25 points)

On définit les fonctions h et k sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$ et $k(x) = -x + x\ln x$.

1. Démontrer que l'équation $k(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[3; 4]$. **1pt**
2. Démontrer que $k(x) = 1$ si et seulement si $h(x) = x$. **0,25pt**
3. Démontrer que pour tout x élément de $[3; 4]$, $h(x)$ est aussi un élément de $[3; 4]$. **0,5pt**
4. Démontrer que $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x élément de $[3; 4]$. **0,5pt**
5. Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = h(U_n), \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \in [3; 4]$. **0,5pt**

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$. **0,5pt**

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **0,5pt**

d) Démontrer que la suite U est convergente et déterminer sa limite. **0,5pt**

Partie B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (6,75 points)

Situation :

Une réserve naturelle contient essentiellement trois espèces de singes : des macaques ; des orang-outans et des chimpanzés. Les relevés topographiques de cette réserve naturelle simulés dans un laboratoire montrent que celle-ci est limitée dans un repère orthonormé (O, I, J) à l'échelle 1cm pour 4 km, par la courbe (C) d'équation $y = x^3 - 3x^2 + 4$, la droite (OI) et les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $x = -1$ et $x = 2$.

Deux routes rectilignes assimilées aux droites (OJ) et (D) d'équation $x = 1$ divisent la réserve en trois sites distincts :

Le site A contenant des macaques est délimité par la courbe (C), les droites (OI), (D_1) et (OJ).

Le site B contenant des orang-outans est délimité par la courbe (C), les droites (OI), (OJ) et (D).

Le site C contenant des chimpanzés est délimité par la courbe (C), les droites (OI), (D) et (D_2).

La densité de la population de macaques est de 15 macaques par km^2, celle d'orang-outans est de 10 orang – outans par km^2 et celle des chimpanzés est de 12 chimpanzés par km^2. Pour protéger certains animaux de la réserve contre les zoonoses (maladies des bêtes), les chercheurs les vaccinent 3 fois. La première vaccination nécessite 1,136 litre de vaccin. La deuxième nécessite 1,54 litre. Les doses de vaccin (en millilitres) par animal sont données par le tableau suivant :

	Macaque	Orang-outang	chimpanzé
1ère dose de vaccin	2ml	1ml	3ml
2ème dose de vaccin	2ml	3ml	4ml
3ème dose de vaccin	2ml	5ml	5ml

Dans la réserve, 15% de chimpanzés ont une maladie M_1. Parmi les chimpanzés atteints par la maladie M_1, 20% ont une maladie M_2 et parmi les chimpanzés non atteints par la maladie M_1, 4% ont la maladie M_2. On choisit un chimpanzé au hasard pour une étude dans un laboratoire.

Tâches :

1. Déterminer le nombre d'animaux de cette réserve. **2,25pts**
2. Déterminer le volume de vaccin en litres nécessaire pour la 3ème vaccination. **2,25pts**
3. Déterminer la probabilité pour que le chimpanzé choisi soit atteint de la maladie M_2. **2,25pts**

 SESSION 2021