UNIVERSITE DE YAOUNDE II FSEG

EPREUVE DE MATHEMATIQUES SECO II, MARS 2006

(Durée 3 heures)

Exercice 1 (8 points)

A) Soit f une application de R^3 dans R^2 définie par :

$\forall(x,y,z)\in R^3, f(x,y,z)=(x+2y-z, 2x+3y+z)$

(R^3 et R^2 sont rapportés à leurs bases canoniques respectives $B=(e_1,e_2,e_3)$ et $B'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$).

1) Montrer que f est linéaire. Donner la matrice M associée à f
2) Déterminer le noyau et l'image de f, ainsi que leurs dimension respective
3) f est-elle injective? Surjective?

B) 1) Soient trois vecteurs de R^3 (R^3 est rapporté à sa base canonique $B=(e_1,e_2,e_3)$) tels que : $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(2,0,4)$ et $u_3=(1,2,1)$. Montrer que ces trois vecteurs constituent une base R^3.

2) exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction u_1, u_2, u_3

Exercice 2 (6 points)

A- Dans l'espace vectoriel R^4, on donne les vecteurs $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-2\end{pmatrix}$, $u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $u_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$, et $u_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\-1\end{pmatrix}$. a) Déterminer le rang du système des vecteurs (u_1,u_2,u_3,u_4) (utiliser la méthode pratique de détermination de rang). b) En déduire que (u_1,u_2,u_3,u_4) n'est pas une base de R^4 et préciser le lien qui existe entre ces vecteurs.

B- Dans l'espace vectoriel R^3, on considère les ensembles suivants :

$A=\{(x,y,z)\in R^3 / x-2y+z=0\}$

$B=\{(x,y,z)\in R^3 / 2x+y-z=0\}$

$C=\{(x,y,z)\in R^3 / -x+y+z=0\}$

1) Montrer que A est un sous espace vectoriel de R^3 et préciser sa base et sa dimension. (on admettra B et C sont aussi des sous-espaces vectoriels de R^3)

2) Déterminer l'intersection des sous-espaces vectoriels B et C. B et C sont-ils supplémentaires? (justifier votre réponse).

Exercice 3 (6 points)

On considère les matrices,

$$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ 3 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

1) Calculer BC
2) montrer que la matrice P est inversible.
3) Déterminer le polynôme caractéristique de A
4) Déterminer les valeurs propres de la matrice A
5) Rechercher les vecteurs propres associés.
6) Montrer que A est diagonalisable. Écrire la matrice diagonale D et donner une base de R^3 formée des vecteurs propres de A.
7) D étant la matrice diagonale correspondant à la matrice A, rappeler la formule liant A, D, P et P^{-1}, P étant la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres.