FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES ET DE GESTION
B.P. 1365 - YAOUNDE
CAMEROUN

www.univ-yde2.org
Tél. : (237) 221 34 41/ Fax (237) 223

FACULTY OF ECONOMICS AND MANAGEMENT
P.O. BOX 1365 - YAOUNDE
CAMEROON

fseg@.univ-yde2.org
Tél. : (237) 221 34 41/ Fax (237) 223

EXAMEN DU PREMIER SEMESTRE 2007/ 2008
EPREUVE DE STATISTIQUES INFERENTIELLES
SECO III-GEST III - Durée 3 heures

Exercice N°1 (4points)

Soit le couple de variables aléatoires absolument continues (X,Y) défini sur Δ par :

$$\Delta = \left\{(x,y) \in R^2 / 0 \le y \le \frac{x}{2} \le 1\right\}$$

Ce couple a comme densité de probabilité h :

$$h(x,y) = \frac{5}{4}x^2 y \quad pour\,(x,y) \in \Delta$$
$$h(x,y) = 0 \cdot sinon$$

a) Vérifier que h est bien une densité de probabilité.
b) Donner la densité marginale de X. Calculer E(X).
c) Déterminer la loi de X+Y.

Exercice N°2 (4 points)

1) On dit qu'une variable X suit la loi gamma à deux paramètre $\Gamma(r,\lambda)$ si $\lambda X \to \Gamma(r)$. $r > 0$ et $\lambda > 0$.

a) rappeler la densité d'une gamma r ($\Gamma(r)$).
b) On suppose que Y suit une $\Gamma(r)$.
Calculer la fonction génératrice de Y.

Calculer E(Y) et Var(Y).

2) X suit $\Gamma(r, \frac{1}{\theta})$,

a) Calculer la fonction génératrice de X.
b) Calculer E(X) et Var(X).
c) On considère un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de X et on suppose que r est connu et θ inconnu.

Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. Donner ses propriétés.

On suppose que n est suffisamment grand, donner un intervalle de confiance de seuil α pour θ.

Application : n = 60 ; $\sum_{i=1}^{n} x_i = 155.85$; $\alpha = 0.05$, r=2

Exercice N°3 (6 points)

Soit X la variable aléatoire de densité : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}xe^{-\frac{x^2}{\theta^2}} & si\ x\geq 0\\ 0 & \sin on\end{cases}$ avec $\theta>0$

1) Montrer que f est effectivement une densité de probabilité.
2) Calculer E(X) et Var(X).
3) On pose $U=\dfrac{X^2}{\theta}$
   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable U.
   b) Calculer E(U) et Var(U).
4) On considère un n-échantillon $X_1,\ldots,X_n$ de X et on suppose que θ est inconnu.

   Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ de θ^2.

   Montrer que $\hat{\theta}_{MV}$ est sans biais pour θ^2 et convergent. Est-il efficace ?

Exercice N°4 (3 points)

On considère un échantillon de taille 10 de la loi normale $N(0,\sigma)$. On veut tester au risque 0.05 les hypothèses suivantes : $\begin{cases}H_0 : \sigma^2=9\\ H_1 : \sigma^2=16\end{cases}$

Déterminer la région critique du test UPP et déduire la constante. Quelle décision prendre si on trouve dans l'échantillon $\sum_{i=1}^{10}x_i^2=122$.

Exercice N°5 (3 points)

Un confiseur vend des boites de bonbons d'un certain modèle. On note X le poids d'une boite pleine. X est une variable aléatoire qui suit une loi normale. Les pesées de 10 boites ont conduit aux poids

(en kilo) : 1.23 1.21 1.19 1.23 1.24 1.18 1.21 1.44 1.38 1.23

a) Donner pour E(X) un intervalle de confiance de seuil 0.05.
b) En supposant que la variance de X soit connue et égale à la variance observée, donner pour E(X) un intervalle de confiance de seuil 0.05 et comparer cet intervalle à celui calculé précédemment.
c) On suppose maintenant que l'on ait trouvé la même moyenne observée et la même variance observée, mais avec 20 observations au lieu de 10. Répondre dans ce cas aux questions a) et b) et comparer les nouveaux résultats à ceux obtenus précédemment.